

Übungsklausur Exponentialfunktion (Blaualggen)

Pflichtteil (ohne Hilfsmittel)

- 1) Leite die Funktion $f(x) = x^3 \cdot e^{-4x-1}$ einmal ab. (2VP)
- 2) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2 + e^{2x+1}$.
Bestimme die Stammfunktion F von f mit $F(0) = e$. (2VP)
- 3) Löse die Gleichung.
a) $e^{2x} \cdot (1 - e^{2x}) = 0$ b) $e^x - 2 = \frac{3}{e^x}$ (4VP)
- 4) Berechne das Integral $\int_1^e \left(\frac{4}{x} - 5 \right) dx$. (3VP)
- 5) Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^{x-2} - 1$.
a) Bestimme die waagerechte Asymptote von f .
b) Beschreibe, wie $f(x)$ aus $g(x) = e^x$ hervorgeht.
c) Bestimme die Gleichung der Tangente an der Stelle $x = 2$
an das Schaubild von f . (4VP)

Übungsklausur Exponentialfunktion (Blaualgen)

Wahlteil (mit WTR und Merkhilfe)



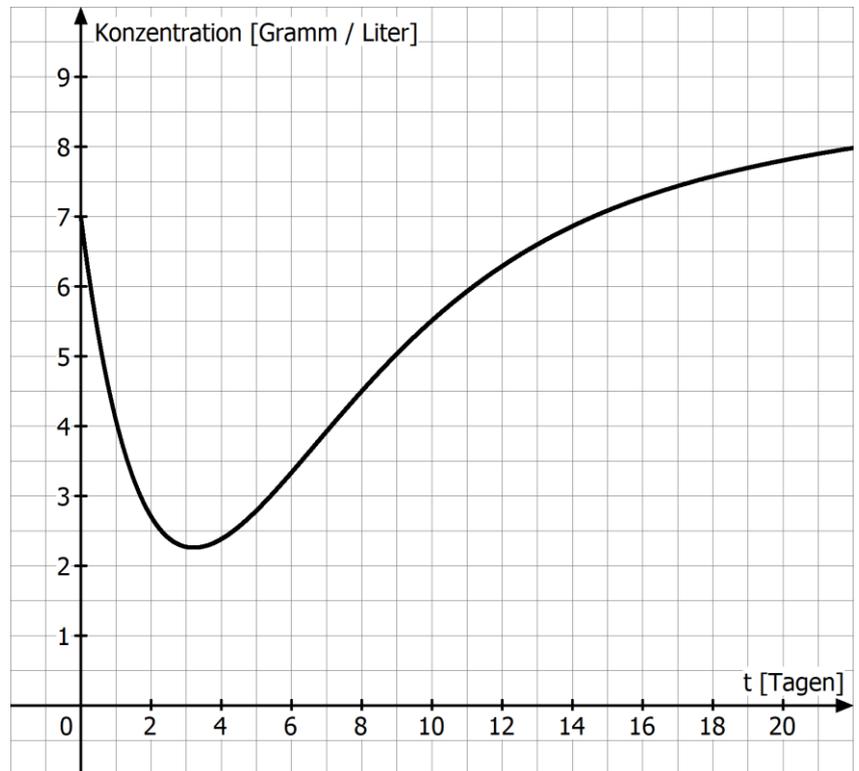
Unter bestimmten Bedingungen kommt es in Teichen zu einem unerwünschten Wachstum von Blaualgen. Ein Hersteller für Teichpflegeprodukte entwickelt Wirkstoffe, um Blaualgen zu bekämpfen.

- a) Die Konzentration von Blaualgen nach einmaliger Zufuhr eines Wirkstoffs A kann beschrieben werden durch die Funktion $f(t)$, die in der nebenstehenden Abbildung dargestellt ist

(t in Tagen seit Wirkstoffzufuhr, $f(t)$ in Gramm pro Liter).

Beantworte folgende Fragen anhand des Graphen:

- (1) Wie hoch ist die Blaualgenkonzentration nach einer Woche?
- (2) Wann beträgt die Konzentration von Blaualgen erstmals 7,5 Gramm pro Liter?
- (3) Nach welcher Zeit wird wieder die anfängliche Konzentration erreicht?
- (4) In welchem Zeitraum nimmt die Blaualgenkonzentration ab?
- (5) Bestimme die mittlere Konzentration der Blaualgen in den ersten 3 Tagen.



- b) Bei einem anderen Wirkstoff B wird ebenfalls nach einmaliger Zufuhr dessen Wirkung auf die Konzentration von Blaualgen untersucht. Die jeweilige Konzentration der Blaualgen nach Zufuhr des Wirkstoffs wird hierbei durch die Funktion g mit

$$g(t) = a - 4 \cdot t \cdot e^{kt}; \quad 0 \leq t \leq 20 \quad \text{beschrieben}$$

(t in Tagen seit Wirkstoffzufuhr, $g(t)$ in Gramm pro Liter).

Zum Beginn ($t = 0$ Tage) betrug die Konzentration der Blaualgen 9 Gramm pro Liter, nach 4 Tagen betrug sie nur noch 3,114 Gramm pro Liter. Bestimme a und k und gib eine Funktionsgleichung für $g(t)$ an.

- c) Gib eine Gleichung an, mit der folgende Fragestellung gelöst werden kann:
 „Bestimme den 7-Tage Zeitraum, in dem die von g beschriebene Konzentration erstmals um 1 Gramm pro Liter zunimmt.“

Übungsklausur Exponentialfunktion (Blaualggen)

Pflichtteil Lösungen:

1) $f'(x) = 3x^2 \cdot e^{-4x-1} + x^3 \cdot e^{-4x-1} \cdot (-4)$ 2P

2) $F(x) = 2x + \frac{1}{2}e^{2x+1} + c$ Bestimme c: $F(0) = \frac{1}{2}e + c = e \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}e$
 $\Rightarrow F(x) = 2x + \frac{1}{2}e^{2x+1} + \frac{1}{2}e$ 2P

3) a) $e^{2x} \cdot (1 - e^{2x}) = 0 \Rightarrow e^{2x} = 0$ (k.L.) oder $1 - e^{2x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x} = 1 \Leftrightarrow \boxed{x=0}$ (1,5P)

b) $e^x - 2 = \frac{3}{e^x} \quad | \cdot e^x \Leftrightarrow e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$

Substitution: $u = e^x : u^2 - 2u - 3 = 0 \Rightarrow u_{\frac{1}{2}} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2$

$u_1 = 3 \Rightarrow e^x = 3 \Leftrightarrow \boxed{x = \ln 3}$ oder $u_2 = -1 \Rightarrow e^x = -1 \Leftrightarrow$ k.L. (2,5P) 4P

4) $\int_1^e \left(\frac{4}{x} - 5 \right) dx = [4 \cdot \ln(x) - 5x]_1^e = 4 - 5e + 5 = 9 - 5e$ 3P

5) a) Für $x \rightarrow \infty$ gilt: $f(x) = e^{x-2} - 1 \rightarrow \infty$

Für $x \rightarrow -\infty$ gilt: $f(x) = e^{x-2} - 1 \rightarrow -1$

$\Rightarrow y = -1$ für $x \rightarrow -\infty$ (1P)

- b) - Verschiebung des Schaubilds von $g(x)$ um 2LE in Richtung der positiven x- Achse.
- Verschiebung des Schaubilds von $g(x)$ um 1LE in Richtung der negativen y- Achse. (1P)

c) t: $y = mx + c$ $f'(x) = e^{x-2}$ (0,5P) $\Rightarrow f'(2) = e^{2-2} = e^0 = 1 = m$ (0,5P)

$f(2) = 0 \Rightarrow P(2|0)$ (0,5P)

t: $y = mx + c$ P und m einsetzen: $0 = 1 \cdot 2 + c \Leftrightarrow c = -2$

$\Rightarrow t: y = x - 2$ (0,5P) 4P

Summe: 15P

Übungsklausur Exponentialfunktion (Blaualggen)

Wahlteil Lösungen:

a) (1) $f(7) \approx 4 \Rightarrow$ 4Gramm / Liter

(2) $f(t) = 7,5 \Rightarrow t \approx 17,5 \Rightarrow$ nach 17,5 Tagen

(3) $f(t) = 7 \Rightarrow t \approx 14,5 \Rightarrow$ nach 14,5 Tagen

(4) Minimum von $f(t)$: $t \approx 3,5$

\Rightarrow Die Algenkonzentration nimmt im Zeitraum von 0 bis ca. 3,5 Tagen ab.

(5) Einzeichnen:

Fläche unter der Funktion im Bereich $0 \leq t \leq 3$

=

Fläche eines Rechtecks mit Breite 3 und Höhe m (m passend in der Höhe von etwa 4 einzeichnen)

\Rightarrow Mittlere Konzentration ca. $m \approx 4g/l$

b) (I) $g(0) = 9 \Leftrightarrow a - 0 = 9 \Leftrightarrow$ $a = 9$

(II) $g(4) = 3,114 \Leftrightarrow 9 - 4 \cdot 4 \cdot e^{4k} = 3,114$

(II) $16 \cdot e^{4k} = 5,886 \Leftrightarrow e^{4k} = 0,368 \Leftrightarrow 4k = -1 \Leftrightarrow$ $k = -\frac{1}{4}$

$\Rightarrow g(t) = 9 - 4 \cdot t \cdot e^{-0,25t}$

c) $g(t+7) - g(t) = 1$